Exercice N°2

On définit la suite: $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1.

   b) calculer $U_1 + U_3$; En déduire la valeur de U_3

2) Montrer que pour tout ,$n \in \mathbb{N}$: U_n 0.

3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire quelle est convergente.

Montrer que : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (U_n)

1) a) Calculer U_1.

$$U_1 = \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,du$$

$\frac{u'}{2\sqrt{u}} \xrightarrow{f} \sqrt{u}$

$$= \int_0^1 \frac{\overbrace{2u}^{u'}}{\underbrace{2\sqrt{1+u^2}}_{2\sqrt{u}}}\,du$$

$$= \left[\sqrt{1+u^2}\right]_0^1$$